第27卷 第4期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 4
2010年08月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Aug. 2010

文章编号:1005-3085(2010)04-0593-06

随机负债情形的信用违约互换定价*

欧阳异能[1,2]， 徐 云[1,†]

(1- 新疆大学数学与系统科学学院，乌鲁木齐 830046;
2- 石河子大学师范学院数学系，新疆 石河子 832003)

摘 要: 信用违约互换是一种重要的信用衍生品。本文在信用违约互换基本原理的基础上，根据信用违约互换的现金流对信用违约互换的价值进行分析，并假定参考资产随机负债，采用结构化模型框架下无套利原理的定价方法，得到信用违约互换定价的基本模型。利用具有漂移的Brown运动的最小值分布求得违约概率密度函数，最终给出了信用违约互换的定价公式。

关键词: 信用违约互换；违约概率密度；鞅方法；反射原理

分类号: **AMS**(2000) 62P05 **中图分类号**: O29; F830 **文献标识码**: A

1 引言

信用违约互换(CDS)是最基本的信用衍生品之一，是指信用保护买方(A)向保护卖方(B)支付一定费用，如果双方约定的参考资产(C)在规定的时间内发生特定信用事件，则信用保护卖方向信用保护买方支付相应赔偿的互换交易结构。

信用违约互换的定价方法主要分为结构化模型[1,2]和强度模型[3]，这两类模型从不同的角度对公司信用违约行为的产生进行了解释，对关键变量的不同假设都有优点和不足。文献[4,5]针对文献[2]模型拓展为任何时刻t，当公司资产价值跌至某一特定水平，则违约发生。文献[3]将公司的违约现象看作不可预测的因素造成的，利用Poisson过程的特征参数—强度刻画事件发生的可能性，但是违约事件强度参数的确定还是广泛关注的难题。

本文将讨论随机负债情形下信用违约互换定价，采用结构化模型框架下无套利原理的定价方法，利用具有漂移的Brown运动的最小值分布求得违约概率密度函数，给出信用违约互换定价公式。

2 模型建立

假设金融市场概率空间为(Ω,F,P)，P为市场概率测度，无风险利率为r。C的资产价值和负债分别服从(Ω,F,P)上的几何Brown运动$\mathrm{d}V_t=\mu_1V_t\mathrm{d}t+\sigma_1V_t\mathrm{d}B_t^1$，$\mathrm{d}D_t=\mu_2D_t\mathrm{d}t+\sigma_2D_t\mathrm{d}B_t^2$，$\mu_i, \sigma_i$为常数，$B_t^i$为$(\Omega,F,P)$上标准Brown运动，且$\mathrm{d}B_t^1\mathrm{d}B_t^2=\rho\mathrm{d}t$，$i=1,2$。约定C的资产价值低于其债券值时发生违约，即C违约时间为$\tau=\inf\{t:t>0,\delta_t<1\}$，$\delta_t=\frac{V_t}{D_t}$。互换保费持续支付到违约事件发生或合约到期，若C破产，考虑到对C进行清算需要一段时间θ，于是B的违约赔偿在结算日$\tau+\theta$才发生。

收稿日期: 2009-02-27. **作者简介**: 欧阳异能(1979年4月生)，男，讲师. 研究方向：数理金融.
***基金项目**: 新疆维吾尔自治区高校科研计划重点项目(XJEDU2008I09).
†**通讯作者**: 徐云 E-mail: xy_ xju@126.com

设 $\widehat{B}_t^1$ 是 P 下与 B_t^1 相互独立的标准Brown运动，则 $\mathrm{d}B_t^2=\rho\mathrm{d}B_t^1+\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\widehat{B}_t^1$。令

$$\theta_1=\frac{\mu_1-r}{\sigma_1},\quad \theta_2=\frac{\mu_2-(r+\rho\sigma_2\theta_1)}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}},\quad \mathrm{d}W_t^1=\theta_1\mathrm{d}t+\mathrm{d}B_t^1,\quad \mathrm{d}\overline{B}_t^1=\theta_2\mathrm{d}t+\mathrm{d}\widehat{B}_t^1,$$

$$N_t=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\exp\Big\{-\Big(\theta_1B_t^1+\theta_2\widehat{B}_t^1\Big)-\frac{1}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)t\Big\}.$$

由Girsanov定理知 W_t^1, $\overline{B}_t^1$ 是测度 Q 下的相互独立标准Brown运动，$\mathrm{d}V_t=rV_t\mathrm{d}t+\sigma_1V_t\mathrm{d}W_t^1$, $\mathrm{d}D_t=rD_t\mathrm{d}t+\sigma_2D_t\mathrm{d}W_t^2$，其中 $\mathrm{d}W_t^2=\rho\mathrm{d}W_t^1+\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\overline{B}_t^1$，且满足 $\mathrm{d}W_t^1\mathrm{d}W_t^2=\rho\mathrm{d}t$。

现考察A与B在0时刻签订面值1，到期日 T 的信用违约互换合约，C在任何时刻 $t\le T$ 都可能违约，等时间间隔 $\triangle$ 按比例支付费用，且不存在交易对手风险。记 w :信用违约互换价格，即每期支付保费的比率；R :表示违约发生后债券的期望挽回率；T_i :每期支付信用违约互换保费的时间，$i=1,2,\cdots,n$；$f(t)$:表示 τ 的概率密度函数。

最后一次支付前，A每期支付 $w1_{\{\tau\ge T_i\}}$，其在0时刻的价值为 $E_Q(w\mathrm{e}^{-rT_i}1_{\{\tau\ge T_i\}})$，最后一次支付0时刻的价值为

$$\sum_{i=1}^n E_Q\Big(w\mathrm{e}^{-rT_i}\Big(\frac{\tau-T_{i-1}}{\triangle}\Big)1_{\{T_{i-1}<\tau<T_i\}}\Big),$$

因此A在0时刻的价值为

$$PV_b=\sum_{i=1}^n E_Q\big(w\mathrm{e}^{-rT_i}1_{\{\tau\ge T_i\}}\big)+\sum_{i=1}^n E_Q\Big(w\mathrm{e}^{-rT_i}\Big(\frac{\tau-T_{i-1}}{\triangle}\Big)1_{\{T_{i-1}<\tau<T_i\}}\Big).$$

若到期之前违约发生，在赔偿结算日 $\tau+\theta$ 时，A从B得到赔偿额 $(1-R)1_{\{\tau\le T\}}$，在0时刻的价值为 $PV_s=E_Q\big((1-R)\mathrm{e}^{-r(\tau+\theta)}1_{\{\tau\le T\}}\big)$。

根据无套利原理，A支付互换保费的比率为

$$\begin{aligned} w&=\frac{E_Q\big((1-R)\mathrm{e}^{-r(\tau+\theta)}1_{\{\tau\le T\}}\big)}{\sum\limits_{i=1}^n E_Q\big(\mathrm{e}^{-rT_i}1_{\{\tau\ge T_i\}}\big)+\sum\limits_{i=1}^n E_Q\big(\mathrm{e}^{-rT_i}\big(\frac{\tau-T_{i-1}}{\triangle}\big)1_{\{T_{i-1}<\tau<T_i\}}\big)}\\ &=\frac{(1-R)\int_0^T\mathrm{e}^{-r(x+\theta)}f(x)\mathrm{d}x}{\sum\limits_{i=1}^n\int_{T_i}^T\mathrm{e}^{-rT_i}f(x)\mathrm{d}x+\sum\limits_{i=1}^n\int_{T_{i-1}}^{T_i}\mathrm{e}^{-rT_i}\big(\frac{x-T_{i-1}}{\triangle}\big)f(x)\mathrm{d}x}. \end{aligned}$$

3 违约概率密度

引理1[6] 设 $B_t^*=\min\limits_{0\le s\le t}B_s$，$B_s$ 是在测度 P 下的一维标准Brown运动，则 B_t^* 和 B_t 的联合概率密度函数为

$$h_1(x,y)=\frac{-2(2x-y)}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\Big(-\frac{(2x-y)^2}{2t}\Big),$$

其中 $x\le0$, $y\ge x$。

定理1 设 $X_s=B_s+\mu s$，μ 为常数，$X_t^*=\min\limits_{0\le s\le t}X_s$，则 X_t^* 和 X_t 的联合分布函数为

$$H_2(x,y)=\Phi\Big(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\Big)+\mathrm{e}^{2x\mu}\Big(\Phi\Big(\frac{y-(2x+\mu t)}{\sqrt{t}}\Big)-\Phi\Big(\frac{-(x+\mu t)}{\sqrt{t}}\Big)\Big),$$

其中 $x \le 0$, $y \ge x$。

证明　设 $x \le 0$, $y \ge x$，引入等价鞅测度，定义如下

$$M_t = \frac{\mathrm{d}\widetilde{P}}{\mathrm{d}P} = \exp\Big(- \mu B_t - \frac{1}{2}\mu^2 t \Big).$$

根据Girsanov定理，$\widetilde{B}_s = B_s + \mu s$ 在 $[0,t]$ 上是测度 $\widetilde{P}$ 下的一维标准Brown运动，于是 $X_s = \widetilde{B}_s$ 在 $[0,t]$ 上是关于测度 $\widetilde{P}$ 的一维标准Brown运动。于是由引理1可得

$$\begin{aligned} P(X_t^* \le x, X_t \le y) &= E_P\big(1_{\{X_t^* \le x, X_t \le y\}}\big) = E_{\widetilde{P}}\big(M_t^{-1} 1_{\{X_t^* \le x, X_t \le y\}}\big) \\ &= E_{\widetilde{P}}\Big(\exp\Big(\mu X_t - \frac{1}{2}\mu^2 t\Big) 1_{\{X_t^* \le x, X_t \le y\}} \Big) \\ &= \int_{-\infty}^{y} \Big(\int_{-\infty}^{x} \exp\Big(\mu q - \frac{1}{2}\mu^2 t\Big) \frac{-2(2p-q)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\Big(- \frac{(2p-q)^2}{2t}\Big) \mathrm{d}p \Big) \mathrm{d}q \\ &\quad - \int_{-\infty}^{x} \Big(\int_{q}^{x} \exp\Big(\mu q - \frac{1}{2}\mu^2 t\Big) \frac{-2(2p-q)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\Big(- \frac{(2p-q)^2}{2t}\Big) \mathrm{d}p \Big) \mathrm{d}q \\ &= \mathrm{e}^{2x\mu} \Phi\Big(\frac{y-(2x+\mu t)}{\sqrt{t}} \Big) - \Big(\mathrm{e}^{2x\mu} \Phi\Big(\frac{-(x+\mu t)}{\sqrt{t}} \Big) - \Phi\Big(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}} \Big) \Big). \end{aligned}$$

所以，X_t^* 和 X_t 的联合分布函数为

$$\begin{aligned} H_2(x,y) &= P\big(X_t^* \le x, X_t \le y \big) \\ &= \mathrm{e}^{2x\mu} \Phi\Big(\frac{y-(2x+\mu t)}{\sqrt{t}} \Big) - \Big(\mathrm{e}^{2x\mu} \Phi\Big(\frac{-(x+\mu t)}{\sqrt{t}} \Big) - \Phi\Big(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}} \Big) \Big) \\ &= \Phi\Big(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}} \Big) + \mathrm{e}^{2x\mu} \Big(\Phi\Big(\frac{y-(2x+\mu t)}{\sqrt{t}} \Big) - \Phi\Big(\frac{-(x+\mu t)}{\sqrt{t}} \Big) \Big). \end{aligned}$$

定理2　设 $Y_s = \sigma B_s + \mu s$，μ, σ 为常数，且 $\sigma > 0$，$Y_t^* = \min\limits_{0 \le s \le t} Y_s$，则 Y_t^* 和 Y_t 的联合分布函数为

$$G(x,y) = \Phi\Big(\frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}} \Big) + \mathrm{e}^{2x\mu\sigma^{-2}} \Big(\Phi\Big(\frac{y-(2x+\mu t)}{\sigma\sqrt{t}} \Big) - \Phi\Big(\frac{-(x+\mu t)}{\sigma\sqrt{t}} \Big) \Big),$$

其中 $x \le 0$, $y \ge x$。

证明　设 $Z_t = \frac{Y_t}{\sigma} = B_t + \frac{\mu}{\sigma} t$，$Z_t^* = \min\limits_{0 \le s \le t} Z_s$，由定理1可得

$$\begin{aligned} G(x,y) &= P(Y_t^* \le x, Y_t \le y) = P\Big(Z_t^* \le \frac{x}{\sigma}, Z_t \le \frac{y}{\sigma} \Big) \\ &= \Phi\Big(\frac{\frac{x}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} t}{\sqrt{t}} \Big) + \mathrm{e}^{2\frac{x}{\sigma}\frac{\mu}{\sigma}} \Big(\Phi\Big(\frac{\frac{y}{\sigma} - (2\frac{x}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma} t)}{\sqrt{t}} \Big) - \Phi\Big(\frac{-(\frac{x}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma} t)}{\sqrt{t}} \Big) \Big) \\ &= \Phi\Big(\frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}} \Big) + \mathrm{e}^{2x\mu\sigma^{-2}} \Big(\Phi\Big(\frac{y-(2x+\mu t)}{\sigma\sqrt{t}} \Big) - \Phi\Big(\frac{-(x+\mu t)}{\sigma\sqrt{t}} \Big) \Big). \end{aligned}$$

当 $y = \infty$ 时，可得以下推论。

推论1 Y_t^* 的概率分布函数为

$$H(x) = P(Y_t^* \le x) = \Phi\Big(\frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\Big) + \mathrm{e}^{2x\mu\sigma^{-2}}\Phi\Big(\frac{x+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\Big), \quad x \le 0.$$

定理3 假设参考资产C的资产价值和负债分别服从几何Brown运动 $\mathrm{d}V_t = rV_t\mathrm{d}t + \sigma_1 V_t\mathrm{d}W_t^1$, $\mathrm{d}D_t = rD_t\mathrm{d}t + \sigma_2 D_t\mathrm{d}W_t^2$，其中 r 为无风险利率，σ_i 为常数，W_t^i 为 Q 测度下标准Brown运动，且设 $\mathrm{d}W_t^1\mathrm{d}W_t^2 = \rho\mathrm{d}t$，则C的违约概率密度函数为

$$\begin{aligned} f(t) = & -\frac{(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t + \ln\frac{D_0}{V_0}}{2\sigma_\delta\sqrt{t^3}}\varphi\Big(\frac{\ln\frac{D_0}{V_0} - (\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t}{\sigma_\delta\sqrt{t}}\Big) \\ & + \mathrm{e}^{2\sigma_\delta^{-2}(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)\ln\frac{D_0}{V_0}} \cdot \frac{(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t - \ln\frac{D_0}{V_0}}{2\sigma_\delta\sqrt{t^3}}\varphi\Big(\frac{\ln\frac{D_0}{V_0} + (\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t}{\sigma_\delta\sqrt{t}}\Big), \end{aligned}$$

其中 $\mu_\delta = \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2$，$\sigma_\delta = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$。

证明 由Itô公式可得 $\delta_t = \frac{V_t}{D_t}$ 的微分如下[7]

$$\frac{\mathrm{d}\delta_t}{\delta_t} = \frac{\mathrm{d}V_t}{V_t} - \frac{\mathrm{d}D_t}{D_t} + \Big(\frac{\mathrm{d}D_t}{D_t}\Big)^2 - \frac{\mathrm{d}V_t}{V_t}\frac{\mathrm{d}D_t}{D_t}.$$

将 Q 测度下的 $\frac{\mathrm{d}V_t}{V_t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}D_t}{D_t}$ 代入，得

$$\frac{\mathrm{d}\delta_t}{\delta_t} = (\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)\mathrm{d}t + \sigma_1\mathrm{d}W_t^1 - \sigma_2\mathrm{d}W_t^2.$$

定义

$$\mu_\delta = \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2, \quad \sigma_\delta = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}, \quad W_t^\delta = \frac{\sigma_1 W_t^1 - \sigma_2 W_t^2}{\sigma_\delta},$$

则 $E(W_t^\delta) = 0$, $\mathrm{Var}(W_t^\delta) = 1$，于是 W_t^δ 为测度 Q 下标准Brown运动，所以 $\frac{d\delta_t}{\delta_t} = \mu_\delta\mathrm{d}t + \sigma_\delta\mathrm{d}W_t^\delta$，解得

$$\delta_t = \delta_0\mathrm{e}^{(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t + \sigma_\delta W_t^\delta}, \quad \delta_0 = \frac{V_0}{D_0}.$$

由推论1可得违约概率为

$$\begin{aligned} Q(\tau \le t) &= 1 - Q(\tau > t) = 1 - Q\Big(\inf_{0\le s\le t}\delta_s \ge 1\Big) \\ &= 1 - Q\Big(\inf_{0\le s\le t}\Big(\Big(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2\Big)s + \sigma_\delta W_s^\delta\Big) \ge \ln\frac{D_0}{V_0}\Big) \\ &= Q\Big(\inf_{0\le s\le t}\Big(\Big(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2\Big)s + \sigma_\delta W_s^\delta\Big) < \ln\frac{D_0}{V_0}\Big) \\ &= \Phi\Big(\frac{\ln\frac{D_0}{V_0} - (\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t}{\sigma_\delta\sqrt{t}}\Big) + \mathrm{e}^{2\sigma_\delta^{-2}(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)\ln\frac{D_0}{V_0}}\Phi\Big(\frac{\ln\frac{D_0}{V_0} + (\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t}{\sigma_\delta\sqrt{t}}\Big). \end{aligned}$$

所以公司的违约概率密度函数为

$$\begin{aligned} f(t) = & -\frac{(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t + \ln\frac{D_0}{V_0}}{2\sigma_\delta\sqrt{t^3}}\varphi\Big(\frac{\ln\frac{D_0}{V_0} - (\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t}{\sigma_\delta\sqrt{t}}\Big) \\ & + \mathrm{e}^{2\sigma_\delta^{-2}(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)\ln\frac{D_0}{V_0}} \cdot \frac{(\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t - \ln\frac{D_0}{V_0}}{2\sigma_\delta\sqrt{t^3}}\varphi\Big(\frac{\ln\frac{D_0}{V_0} + (\mu_\delta - \frac{1}{2}\sigma_\delta^2)t}{\sigma_\delta\sqrt{t}}\Big). \end{aligned}$$

4　数值模拟

下面通过具体例子来说明前面的定价模型，考虑一份5年期合约，初始资产值为1000万，初始负债为400万，挽回率为40%，无风险利率为6%。在其它量不变的情况下，我们分别得到CDS价格w与变量T, θ, R, $\frac{D_0}{V_0}$的关系如图1至图4。图1表明，CDS价格随合约期限T增加而迅速减少，这也与实际相符，当合约期限越长，违约可能性就越大，因此保费应该越少。图2表明，清算时间越长，合约买方得到的赔偿的现值就越少，因此CDS价格越少。而挽回率R也是影响CDS价格的一个重要因素，挽回率越大，赔偿就会越少，所以保费自然就会少。最后考虑公司初始负债比$\frac{D_0}{V_0}$，当比值为0，说明公司没有负债，因而保费为0，当比值越大，说明公司负债越多，违约可能性越大，CDS价格就增大。

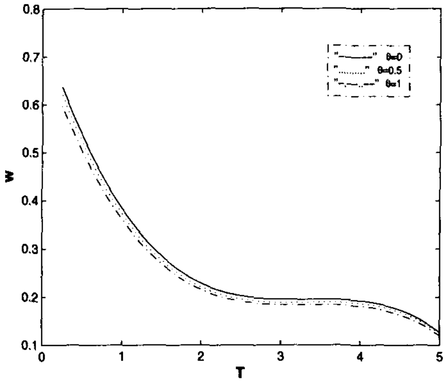

图1:　期限T与CDS价格w关系

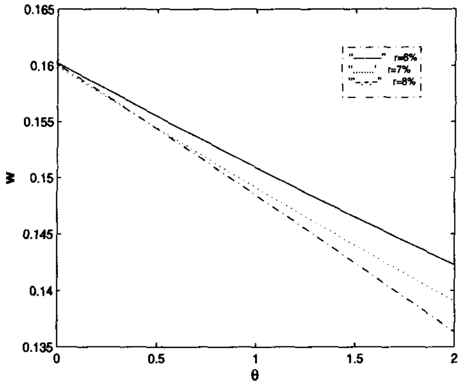

图2:　清算时间θ与CDS价格w关系

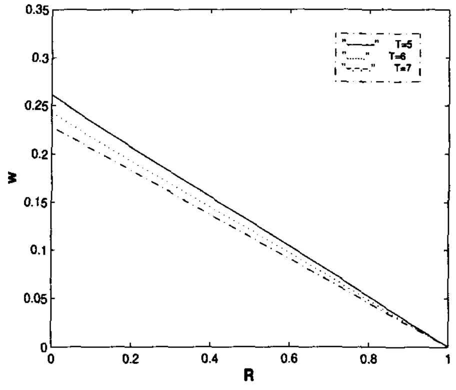

图3:　挽回率R与CDS价格w关系

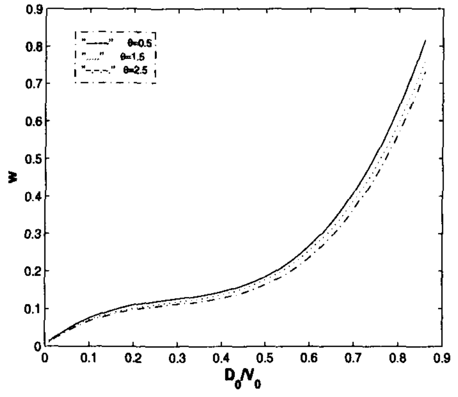

图4:　初始负债比D_0/V_0与CDS价格w关系

5 结束语

本文讨论了随机负债情形下信用违约互换的定价问题。采用结构化模型框架下无套利原理定价方法，考虑结算风险，利用鞅方法得到公司的违约概率密度，进一步得出信用违约互换的价格。最后通过数值计算，讨论了信用违约互换的价格与合约期限 T、违约清算时间 θ、挽回率 R 及公司初始负债比 D_0/V_0 的关系。

参考文献：

[1] Black F, Scholes M. The price of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political and Economy, 1973, 81: 637-654

[2] Merton R C. On the pricing of corporare debt: the risk structure of interest rates[J]. Journal of Finance, 1974, 29: 449-470

[3] Jarrow R, Turnbull S. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk[J]. Journal of Finance, 1995, 50: 53-86

[4] Longstaff F A, Schwartz E S. A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt[J]. Journal of Finance, 1995, 50: 789-819

[5] Black F, Cox J. Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions[J]. Journal of Finance, 1976, 31: 351-367

[6] 龚光鲁. 随机微分方程引论[M]. 北京：北京大学出版社，1987
Gong G L. Introduction to Stochastic Differential Equations[M]. Beijing: Peking University Press, 1987

[7] Ammann M. 信用风险评估—方法-模型-应用[M]. 北京：清华大学出版社，2004
Ammann M. Credit Risk Valuation: Methods, Models, and Applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004

The Pricing of Credit Default Swap under Stochastic Liabilities

OUYANG Yi-neng[1,2], XU Yun[1,†]

(1- College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi 830046;
2- Department of Mathematics, Normal College, Shihezi University, Shihezi, Xinjiang 832003)

Abstract: The credit default swap is an important credit derivative. Based on the basic principle of the credit default swap, this paper analyses the value of a credit default swap in terms of its cash flow. Furthermore, the arbitrage-free principle and structural approaches are used to price the credit default swap under stochastic liabilities, and we get a basic model of the swap. The function of default probability density is obtained by the distribution of the minimum of a Brown motion with a drift, and then we obtain the pricing formula to a credit default swap by above results.

Keywords: credit default swap; default probability density; martingale methods; reflection principle

---

Received: 27 Feb 2009. **Accepted:** 10 Jan 2010.

Foundation item: FSRPHEXJ (XJEDU2008I09).

†**Corresponding author:** Y. Xu. E-mail address: xy_ xju@126.com